method for the study of problems of multi-parameter bifurcations is proposed. The scheme allows you to define the new conditions for signs of synchronization and asymptotic formula for the resulting solutions.

Key words: forced oscillations; dynamical system; bifurcation; synchronization.

УДК 517.92

ПРИЗНАКИ СУБГАРМОНИЧЕСКОЙ БИФУРКАЦИИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ТИПА

© М.Г. Юмагулов, Д.А. Якшибаева

Ключевые слова: бифуркация; динамические системы; системы с запаздыванием; операторные уравнения; функционализация параметра; асимптотические формулы.

В работе предлагается операторный метод для исследования эффекта возникновения субгармонических колебаний в системах с последействием, с периодической правой частью. Метод приводит к новым достаточным признакам бифуркации субгармонических колебаний, а также позволяет получить приближенные формулы для возникающих решений. В качестве приложения рассмотрена задача о точках бифуркации модели, описывающей циклические колебания деловой активности вокруг трендовой кривой роста.

Постановка задачи.

Рассмотрим систему функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа, зависящую от векторного параметра λ с T-периодической по t правой частью:

$$x'(t) = \int\limits_0^r [d_\tau Q(\lambda, t, \tau)]\, x(t-\tau) + a(\lambda, t, x_t), x \in R^N, \lambda \in R^k, \tag{1}$$

где $0 < r \leqslant T$, $Q(\lambda, t, \tau)$ — квадратная $N \times N$ матрица, элементы которой при каждом λ являются функциями ограниченой вариации по $t \in [0, r]$ и при каждом $t \in \in [0, r]$ непрерывно дифференцируемы по λ; $x_t = \big(x(t-\varsigma_1), ..., x(t-\varsigma_s)\big)$, $\varsigma_j \in [0, T), j = = 1, ..., s$; нелинейность $a(t, \lambda, x_t)$ равномерно по λ и t удовлетворяет соотношению $\|a(t, \lambda, x_t)\| = O\left(\|x\|^2\right)$ при $\|x\| \to 0$. Интегралы (1) понимаются в смысле Лебега-Стилтьеса, $\|\cdot\|$ — норма векторов в евклидовом пространстве R^N.

Уравнение (1) при всех значениях λ имеет нулевое решение. В статье исследуется задача о бифуркации периодических решений уравнения (1) в окрестности точки $x = = 0$.

Наряду с (1) будем рассматривать линейную систему

$$x'(t) = \int\limits_0^r [d_\tau Q(\lambda, t, \tau)]\, x(t-\tau). \tag{2}$$

Критическими для уравнения (1) будут те значения λ_0 параметра λ, при которых один или несколько мультипликаторов системы (2) по модулю равны 1. Изменение параметра λ в окрестности λ_0 может приводить к различным локальным бифуркациям в окрестности точки $x=0$.

Обозначим через $V(\lambda)$ матрицу монодромии системы (2). Известно [1], что если матрица $V(\lambda_0)$ не имеет собственное значение равное 1 по модулю, то уравнение (1) при всех λ близких к λ_0 не имеет в некоторой окрестности точки $x=0$ периодические решения. Если же $V(\lambda_0)$ имеет собственное значение равное 1 по модулю, то возможны различные сценарии бифуркаций, определяемые свойствами спектра оператора $V(\lambda_0)$.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть k — натуральное число. Значение λ_0 параметра λ называется точкой бифуркации kT-периодических решений системы (1), если каждому $\varepsilon>0$ соответствует такое $\lambda=\lambda(\varepsilon)$, при котором система (1) имеет ненулевое kT-периодическое решение $x(t,\varepsilon)$, при этом $\max\limits_t \|x(t,\varepsilon)\| \to 0$ при $\varepsilon\to 0$. При $k\geqslant 2$ будем говорить о бифуркации субгармонических колебаний.

Необходимым условием бифуркации kT-периодических решений является наличие у матрицы $V(\lambda_0)$ пары простых комплексно сопряженных собственных значений $e^{\pm 2\pi\frac{p}{k}i}$, где $0<\frac{p}{k}<1$ и $\frac{p}{k}$ — рационально.

Это равносильно тому, что линейная система (2) при $\lambda=\lambda_0$ имеет двупараметрическое семейство kT-периодических решений. Естественным предполагается, что параметр λ является двумерным: $\lambda=(\alpha,\beta)$. Заметим, что параметр λ в системе (1) может быть связан с запаздываниями.

Переход к операторному уравнению

Положим

$$E(\tau)x(t)=\begin{cases} x(t-\tau+T), t\in[0,\tau) \\ x(t-\tau), t\in[\tau,T] \end{cases};$$

тогда T-периодические решения $x(t)$ уравнения (1) определяют решения $u(t)= =x(T\cdot t)$ уравнения

$$u(t)=B(\alpha,\beta,T,t)u(t)+b[\alpha,\beta,T,t,u(t)], \tag{3}$$

где

$$B(\alpha,\beta,T,t)u(t)=u(1)+T\int\limits_0^t\left(\int\limits_0^r [d_\tau Q(\alpha,\beta,s,\tau)]\,E\left(\frac{\tau}{T}\right)u(s)\right)ds,$$

$$b[\alpha,\beta,T,t,u(t)]=T\int\limits_0^t\left(a\left(\alpha,\beta,s,E\left(\frac{\varsigma_1}{T}\right)u(s),...,E\left(\frac{\varsigma_s}{T}\right)u(s)\right)\right)ds.$$

Отметим, что число 1 — полупростое собственное значение оператора $B(\alpha_0,\beta_0,T,t)$: $L_2\to L_2$ кратности 2; это следует из необходимого условия бифуркации субгармонических колебаний. Здесь $L_2=L_2[0,1]$. Обозначим через $e=e(t)$ и $g=g(t)$ линейно независимые собственные функции оператора $B_0: B_0e=e$, $B_0: B_0g=g$. Сопряженный оператор B_0^* также имеет собственное значение 1 кратности 2, которому отвечают собственные функции $e^*=e^*(t)$ и $g^*=g^*(t)$. Эти функции можно выбрать исходя из соотношений $(e,e^*)=(g,g^*)\neq 0$, $(e,g^*)=(g,e^*)=0$.

Т е о р е м а 1. *Матрица $V(\alpha_0,\beta_0)$ имеет пару простых комплексно сопряженных собственных значений $e^{\pm 2\pi\frac{p}{k}i}$, где $0<\frac{p}{k}<1$, $\frac{p}{k}$ — рационально и*

$$\det\begin{bmatrix} (B'_\alpha(\alpha_0,\beta_0)e,e^*) & (B'_\beta(\alpha_0,\beta_0)e,e^*) \\ (B'_\alpha(\alpha_0,\beta_0)e,g^*) & (B'_\beta(\alpha_0,\beta_0)e,g^*) \end{bmatrix}\neq 0, \tag{4}$$

тогда пара чисел (α_0, β_0) *является точкой бифуркации субгармонических колебаний системы* (3) *.*

Здесь B'_α и B'_β — операторы, полученные дифференцированием оператора $B(\alpha, \beta, T, t)$.

В качестве приложения рассмотрена модификация модели, описывающей циклические колебания деловой активности вокруг трендовой кривой роста [2]

$$y''(t) - \left(4\alpha + \frac{6}{5}\beta - 5 - \frac{16}{3}\alpha^3\left(y'(t-1)\right)^3\right)y'(t) + 3,925y(t) = F_2(y(t), t), \qquad (5)$$

где $F_2\big(y(t), t\big)$ является $\frac{\pi}{\sqrt{3,925}}$-периодической по t. Непосредственная проверка условий теоремы 1 показывает, что в системе (5) имеет место бифуркация субгармонических колебаний при значениях $\alpha_0 = 1,05$ и $\beta_0 = \frac{2}{3}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красносельский М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966.

2. *Акаев А.А., Коротаев А.В., Малинецкий Г.Г., Малков С.Ю.* Проекты и риски будущего. Концепции, модели, инструменты, прогнозы. М.: Красанд, 2011.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при частичной поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований 10-01-93112-НЦНИЛ_а и поддержке Минобрнауки РФ, соглашение 14.B37.21.0358 «Развитие новых направлений спектральной теории и теории функций, их приложения в задачах математической физики и нелинейной динамики».

Yumagulov M.G., Yakshibaeva D.A. SIGNS OF SUBHARMONIC BIFURCATIONS FOR FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF RETARDED TYPE

We propose the operator method to study the effect of a subharmonic oscillations in systems with aftereffect, with periodic right-hand side. The method leads to new sufficient tests of the bifurcation of subharmonic oscillations, and also allows you to get the approximate formulas for the resulting decisions. As an application, consider the problem of bifurcation points of the model describing the cyclical fluctuations in economic activity around the trend of the growth curve.

Key words: bifurcation; dynamical systems; time-delay system; the operator equations; the functionalization of the parameter; the asymptotic formula.